

УДК 519.6:675

**РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ УМОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ З ВИКОРИСТАННЯМ
ГРАДІЄНТНИХ МЕТОДІВ
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ
ГРАДИЕНТНЫХ МЕТОДОВ
CONSTRAINED OPTIMIZATION TASKS SOLUTION BY USING GRADIENT
METHODS**

Сангінова О.В., *Данилкович А.Г., Бондаренко С.Г., Брановицька С.В., Червінський В.О.
Сангинова О.В., *Данилкович А.Г., Бондаренко С.Г., Брановицкая С.В., Червинский В.А.
Sanginova O., *Danilkovich A., Bondarenko S., Branovitskaia S., Chervinsky V.

Національний технічний університет України «КПІ», *Київський національний університет
технологій і дизайну, Київ, Україна

Национальный технический университет Украины «КПИ», *Киевский национальный
университет технологии и дизайна, Киев, Украина

National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute", *Kyiv National University
of Technologies and Design, Kyiv, Ukraine

Анотація. Розв'язано задачу багатокритеріальної умовної оптимізації процесу дублення-
жирування хутрової овчини з використанням модифікованого методу релаксації.

Узагальнена цільова функція отримана із застосуванням адитивного критерію

оптимальності. Модифікований метод релаксації може бути використаний при розв'язанні
задач умовної оптимізації аналогічних процесів.

Ключові слова: задача оптимізації, цільова функція, градієнтні методи, дублення, хутрова
овчина.

Аннотация. Решена задача многокритериальной условной оптимизации процесса дубления-
жирования меховой овчины с применением модифицированного метода релаксации.
Обобщенная целевая функция получена с использованием аддитивного критерия
оптимальности. Модифицированный метод релаксации может быть применён при решении
задач оптимизации аналогичных процессов.

Ключевые слова: задача оптимизации, целевая функция, градиентные методы, дубление,
меховая овчина.

Abstract. The constrained optimization task of wool sheepskin tanning–greasing applying Gradient
method is solved. The optimality criterion is formulated as generalized additive objective function.
The modified Gradient method algorithm is software module basis. Mathematical description for a
low-waste technology using dry chrome tanning agent is obtained and its constraints are
determined.

Key words: optimum task, objective function, algorithm, wool sheepskin, tanning.

Введение

Методы решения задач условной многокритериальной оптимизации широко
используются для поиска оптимальных параметров проведения сложных процессов в
химической, нефтехимической и других отраслях промышленности [1]. Известно, что
современные продукты и процессы их получения характеризуются целым спектром
показателей, что обуславливает многокритериальность задач оптимизации. Условия
производства и требования к качеству конечных и промежуточных продуктов накладывают
жесткие требования на диапазон варьирования параметров. Наличие технологических
ограничений требует особого подхода к выбору метода условной оптимизации и
определения оптимальных режимов ведения процесса [1, 4-6]. В то же время многие методы
безусловной оптимизации после соответствующей адаптации могут быть успешно
использованы для решения реальных технологических задач. Авторами выполнен ряд работ
в данном направлении: модифицированы методы Бокса [2] и Хука-Дживса [3] для решения
задач условной оптимизации, построен обобщенный критерий формирования целевой
функции [2, 3]. В продолжение работ в данном направлении предложена модификация

одного из градиентных методов – метода релаксации – для решения упомянутых выше задач. Для апробации метода выбрана современная энерго- и ресурсосберегающая технология дубления-жирования полуфабриката меховых овчин [2, 3]. В рассматриваемом процессе происходит диффузия гидроксосульфатохромовых комплексов дубителя в структуру полуфабриката к активным центрам взаимодействия белковых макромолекул кожной ткани овчин с обеспечением в дальнейшем их структурирования вследствие образования межмолекулярных химических связей между ионизированными карбоксильными группами боковых радикалов макромолекул коллагена. Это обеспечивает необходимую гидротермическую устойчивость и формирование структуры натурального материала с приданием высоких эксплуатационных свойств при уменьшенном расходе экологически вредного дубителя и жирующих веществ. Процесс структурирования основного белкового вещества шкур животных – коллагена соединениями хрома (III) в присутствии пластификатора, обеспечивает равномерную диффузию дубителя и высокие эластические свойства кожной ткани меховой овчины [1, 4]. При этом основными стадиями процесса являются совмещённая кислотно-солевая обработка с собственно дублением и жированием структуры кожной ткани овчин.

Математическое описание процесса дубления-жирования представлено пятью регрессионными уравнениями [4] вида:

$$y_i = a_{i0} + \sum_{j=1}^3 (a_{ij}x_j + b_{ij}x_j^2) + \sum_{j=1, j \neq i}^3 c_{ij}x_i x_j, (i = \overline{1, 5}) \quad (1)$$

где x_1 – содержание Cr_2O_3 , г/дм³; x_2 – электролитоустойчивый сульфатированный дипропиленгликолевый эфир (ДПГЕС), г/дм³ жировых веществ (ЖВ); x_3 – рН среды на завершающей стадии дубления (в значительной мере влияет на упруго-пластические свойства кожаного полуфабриката); y_1 – температура сваривания полуфабриката, °С; y_2 , y_3 – концентрация дубителя и ДПГЕС соответственно в отработанном рабочем растворе, г/(дм³ Cr_2O_3) и г/(дм³ ЖВ); y_4 – граница прочности при растяжении, МПа; y_5 – полное удлинение при напряженности 4,9 МПа, %. Коэффициенты уравнений регрессии (1) представлены в таблице.

Ограничения задачи оптимизации определены в соответствии с технологическими соображениями [3, 4] и приведены ниже:

$0,9 < x_1 < 1,3,$ $3,7 < x_2 < 4,2,$ $3,6 < x_3 < 3,8,$	(2)	$73 < y_1 < 76,$ $0,05 < y_2 < 0,1,$ $0,03 < y_3 < 0,08,$	$280 < y_4 < 300,$ $40 < y_5 < 45.$	(3)
--	-----	---	--	-----

Таблица. Коэффициенты уравнений математической модели

$j \backslash i$	1	2	3	4	5
a_{ij}					
0	75,1587	$6,8995 \cdot 10^{-2}$	$4,4894 \cdot 10^{-2}$	295,97	44,289
1	7,5545	0,1064	$-5,0568 \cdot 10^{-2}$	0	2,7175
2	3,2862	0	0,1236	10,5183	4,3943
3	-2,5166	$-5,27382 \cdot 10^{-2}$	$2,2309 \cdot 10^{-2}$	8,5718	-2,5475
b_{ij}					
1	-2,5166	$5,0657 \cdot 10^{-2}$	$7,5076 \cdot 10^{-2}$	-16,5234	-9,9837
2	0	$9,9113 \cdot 10^{-2}$	$7,1533 \cdot 10^{-2}$	0	-2,9604

3	-1,4537	$3,4713 \cdot 10^{-2}$	5,9857	-6,957	-1,0117
При этом $c_{13} = -0,03125$					

Постановка задачи

В общем виде задача условной многокритериальной оптимизации формулируется в следующем виде:

Пусть качество объекта оптимизации оценивается вектор-функцией

$$f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), \dots, f_k(\bar{x})), \quad (4)$$

компонентами которой являются заданные функции $f_i(\bar{x})$ ($i = 1, 2, \dots, k$) вектора $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, а на переменные x_i ($i = \overline{1, n}$) накладываются как явные (5), так и неявные (6) ограничения:

$$l_j \leq x_j \leq u_j \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (5)$$

$$q_i(\bar{x}) \leq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (6)$$

При этом вектор \bar{x} принадлежит множеству X его возможных значений. Требуется найти такую точку $\bar{x}^* \in X$, которая обеспечит оптимальное значение функций $f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), \dots, f_k(\bar{x})$.

В приведенной постановке решена задача оптимизации процесса дубления-жирования мехового полуфабриката. В качестве локальных критериев $f_i(\bar{x})$ ($i = \overline{1, k}$) использованы регрессионные уравнения, входящие в состав модели (1). Критерии нормировались, поскольку выходные величины модели имеют различную размерность. Безразмерные критерии $f_i^*(\bar{x})$ определяли по формуле:

$$f_i^*(\bar{x}) = \frac{f_i(\bar{x})}{f_{i \max}(\bar{x}) - f_{i \min}(\bar{x})}, \quad (7)$$

где $f_i(\bar{x})$ – значение i критерия.

Обобщенная целевая функция построена на основе аддитивного критерия оптимальности:

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^k \alpha_i f_i(\bar{x}), \quad (8)$$

где α_i – весовые коэффициенты, $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$. Численные значения коэффициентов α_i определены на основе экспертных оценок, и имеют следующие значения: $\alpha_1 = 0,2$; $\alpha_2 = 0,2$; $\alpha_3 = 0,3$; $\alpha_4 = 0,15$, $\alpha_5 = 0,15$.

Тогда обобщенная целевая функция (8) описывается уравнением:

$$f(\bar{x}) = 8,0137 + 0,4645x_1 - 0,5273x_2 + 0,2841x_3 + \\ + 0,1248x_1x_3 - 1,2142x_1^2 - 0,5576x_2^2 - 0,3541x_3^2. \quad (9)$$

Сформулированная задача оптимизации решена модифицированным методом релаксации. Классический метод релаксации [11] относится к градиентным методам, для которых характерной особенностью является высокая скорость поиска экстремума. Выбор метода обусловлен также его простотой, надежностью работы и удобством для программирования. При этом в методе релаксации нет необходимости на каждом шаге поиска вычислять значение градиента, что присуще ряду других градиентных методов.

Обсуждение результатов

Метод релаксации был модифицирован для решения задачи условной оптимизации и предусматривает следующую последовательность действий:

На первом шаге определяем допустимую начальную точку $\bar{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, где n – размерность задачи, задаем точность одномерной оптимизации ε и величину интервала h_i ($i \in I$), в котором производится одномерный поиск; при этом значение h_i определяется с учетом ограничений по i переменной; точность многомерной оптимизации δ .

Второй шаг предусматривает отыскание значений частных производных в точке $\bar{x}^{(0)}$: $\frac{\partial f(\bar{x}^{(0)})}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f(\bar{x}^{(0)})}{\partial x_2}$, ..., $\frac{\partial f(\bar{x}^{(0)})}{\partial x_n}$ и определение направления одномерного поиска. Осевое направление выбирается следующим образом: среди найденных значений производных в точке $\bar{x}^{(0)}$ находят максимальное по модулю. Пусть оно соответствует переменной x_i , вдоль которой функция увеличивается быстрее всего, т.е.:

$$\left| \frac{\partial f(\bar{x}^{(0)})}{\partial x_i} \right| = \max \left\{ \left| \frac{\partial f(\bar{x}^{(0)})}{\partial x_1} \right|, \left| \frac{\partial f(\bar{x}^{(0)})}{\partial x_2} \right|, \dots, \left| \frac{\partial f(\bar{x}^{(0)})}{\partial x_i} \right|, \dots, \left| \frac{\partial f(\bar{x}^{(0)})}{\partial x_n} \right| \right\}.$$

Если знак $\frac{\partial f(\bar{x}^{(0)})}{\partial x_i}$ положительный, то функция $f(\bar{x})$ увеличивается в найденном осевом направлении, а если $\frac{\partial f(\bar{x}^{(0)})}{\partial x_i} < 0$, то в противоположном.

На третьем шаге для найденного осевого направления определяют интервал одномерного поиска оптимума (в рассматриваемой задаче – максимума). Если $\frac{\partial f(\bar{x}^{(0)})}{\partial x_i} > 0$, то $x_{\min} = x_i^{(0)}$, $x_{\max} = x_i^{(0)} + h_i$; если $\frac{\partial f(\bar{x}^{(0)})}{\partial x_i} < 0$, то $x_{\min} = x_i^{(0)} - h_i$, $x_{\max} = x_i^{(0)}$.

В найденном таким образом интервале методом одномерного поиска находится максимальное значение целевой функции по i переменной, соответствующая ему точка проверяется на допустимость, т.е. выполняются ли условия (3). Если эти условия выполняются, то в найденной точке вновь определяются частные производные по всем направлениям (кроме i) и снова находится переменная с наибольшим возрастанием целевой функции. В противном случае частные производные вычисляются в предыдущей точке. Процесс вычислений прекращается при истинности неравенства $|\bar{x}^{(k+1)} - \bar{x}^{(k)}| \leq \delta$ (k – номер итерации).

Описанный алгоритм был положен в основу программного модуля. При работе с программным модулем предусмотрена возможность работы как с явными, так и с неявными ограничениями. Разработанный программный модуль включен в пакет прикладных программ, структура которого разработана авторами.

В результате проведенных расчетов определены оптимальные значения параметров процесса, которые удовлетворяют ограничениям (2, 3): $x_1 = 1,20$; $x_2 = 3,46$; $x_3 = 3,71$; $y_1 = 75,912$; $y_2 = 6,86 \cdot 10^{-2}$; $y_3 = 3,83 \cdot 10^{-2}$; $y_4 = 296,24$; $y_5 = 43,82$.

Полученные значения параметров процесса дубления меховой овчины обеспечивают максимум целевой функции (9) и позволяют повысить качество конечного продукта и техногенность процесса дубления-жирования меховых овчин путем исключения из технологии обработки полуфабриката биологически неразлагаемого инертного индустриального масла И12А, поверхностно-активных веществ, необходимых для его

эмульгирования, а также уменьшить расход экологически вредного хромового дубителя на 33 %, жирующих веществ в 2,5 раза и достичь таким образом, практически полного поглощения химических реагентов.

Выводы

Проведенный анализ процесса дубления-жирования мехового полуфабриката позволил формализовать задачу оптимизации: сформулирован обобщённый критерий оптимизации, определены технологические ограничения на параметры.

Модифицирован метод релаксации и использован для отыскания оптимальных значений целевой функции рассматриваемого процесса.

Выполнена программная реализация модифицированного метода релаксации и разработанный программный модуль включен в пакет прикладных программ COTSolution, разработанных на кафедре кибернетики химико-технологических процессов НТУУ «КПИ».

Полученные данные позволят повысить качественные показатели конечного продукта и исключить из технологии обработки полуфабриката биологически неразлагаемые вещества, а также уменьшить расход экологически вредных веществ путем практически полного поглощения токсичных химических реагентов.

Список литературы

Одно из

[1] Островский, Г.М. Оптимизация химико-технологических процессов. Теория и практика [Текст] / Г.М. Островский, Т.А. Бережинский. – М.: Химия, 1984. – 240 с.

[1] Мицель, А.А. Методы оптимизации. Часть 1: Учебное пособие [Текст] А.А. Мицель, А.А. Шелестов. – Томск: Томский межвузовский центр дистанционного образования, 2002. – 192 с.

[1] Кузнецов, А.С. Гибкая технология оценки альтернатив в случае сложных критериев // Вестник СибГУТИ. – 2012. - № 1. – С. 13 – 22.

[2] Данилкович, А. Г. Использование метода Бокса в задачах многокритериальной оптимизации / Данилкович А.Г., Брановицкая С.В., Бондаренко С.Г., Сангинова О.В. // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – 2013. – № 3/4 (63). – С. 4-8.

[3] Брановицька, С.В. Багатокритеріальна оптимізація процесу дублення за модифікованим методом Хука-Дживса / Брановицька С. В., Бондаренко С.Г., Данилкович А.Г., Сангінова О. В., Червінський В.О. // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2014. - № 1 (26). – С. 24-30.

[4] Інноваційні технології виробництва шкіряних і хутрових матеріалів та виробів : монографія / А. Г. Данилкович, І. М. Грищенко, В. І. Ліщук [та ін.] ; за ред. А. Г. Данилковича. – К. : Фенікс, 2012. 344 с.

[5] Екологічно орієнтовані технології виробництва шкіряних та хутрових матеріалів для створення конкурентоспроможних товарів [у 2 ч.] : монографія. Ч. I : Екологічно орієнтовані технології виробництва шкіряних та хутрових матеріалів / А. Г. Данилкович, В. І. Ліщук, В. П. Плаван, Е. Є. [та ін.] ; за ред. А. Г. Данилковича. : К. : Фенікс, 2011. – 437, [3] с.

[6] Данилкович А. Г. Екологічні аспекти сучасних технологій шкіряного та хутрового виробництва / А. Г. Данилкович, О. Г. Жигецкий // Зб. наук. праць SIET 12-02 «Сучасні інформаційні та енергозберіг. технології життєзабезпечення людини». – 2002. – Вип. 12. – С. 51-53.

[7] Lischuk V. I. Transformation of the collagen structure during beam-house processes and combined tanning / V. I. Lischuk, V. P. Plavan, A. G. Danilkovich // Proceedings of the estonian academy of sciences. Engineering. – 2006. – № 12/3-1. – P. 188-198.

[8] Екологічно ефективні ресурсощадні технології виробництва поліфункціональних шкіряних матеріалів / А. Г. Данилкович, В. І. Ліщук, О. Г. Жигецкий, В. К. Жуковський //

Матеріали Міжнародного Екологічного форуму «Довкілля для України». – 2013. – С. 138-141

[9] Данилкович А. Г. Особливості взаємодії гідрокосульфатохромових комплексів з колагеном / А. Г. Данилкович // Вісник КДУТД. – 2001. – № 1. – С. 151-153.

[10] Данилкович А. Г. Розробка технології дублення-жирування хутрової овчини та її багатокритеріальна оптимізація / А. Г. Данилкович, О. В. Василюк // Проблеми лёгкой и текстильной промышленности Украины. – 2000. – № 3. – С. 82-84.

[11] Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс ; перевод с англ. / Б. Банди. – М. : Радио и связь, 1988. – 129 с.